数理解析研究所講究録
362巻 1979年 25-29

An affirmative answer of a Joyal's problem

名大理 安本雅洋

$\mathfrak{A}$を$\mathbb{N}$の elementary extension, a, bを$\mathfrak{A}$の元. $[a, b]^{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models a \leq x \leq b\}$とする。

Joyal の問題とは.

(*) $\mathbb{N}$の elementary extension $\mathfrak{A}$と. $\mathfrak{A}$の元cで. $[0, c]^{\mathfrak{A}}$が可算. $[0, 2^c]^{\mathfrak{A}}$が非可算となる model が存在するか.

である。以下において. (*)に対する肯定的結果を与える。

言語 $L = \langle +, \cdot, 0, 1, f \rangle$ ただし. fは一変数関数記号とする。自然数上の関数$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$に関して次の定理が成立する。

<u>定理</u>. 次の二条件は同値である。

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ ($f(m) > m^n$ を満たすmが無限個存在する。)

(b) $(\mathbb{N}, f)$ の elementary extension $(\mathfrak{A}, f')$ と $\mathfrak{A}$ の元 c で、$[0, c]^{\mathfrak{A}}$ が可算、$[0, f'(c)]^{\mathfrak{A}}$ が非可算となるものが存在する。

$[0, c]^{\mathfrak{A}}$ が可算ならば、$[0, c^n]$ が可算になることより、$\neg(a) \to \neg(b)$ は容易にわかる。(a) $\to$ (b) を証明する。c, d を constant symbols とする。

<u>Lemma 1.</u> T を次の sentences の集合とする。

(1) $Th(\mathbb{N}, f)$ i.e. $(\mathbb{N}, f)$ で成立する L の sentences の集合。

(2) $0 < c$, $1 < c$, $2 < c$, ...

(3) $d < f(c)$

(4) $\varphi(x, y_1, \cdots, y_n)$ を L の formula とする時

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n (y_1 \leq f(c) \wedge \cdots\cdots \wedge y_n \leq f(c) \to d \neq \mu x\, \varphi(x, y_1, \cdots, y_n))$$

ただし、$\mu x\, \varphi(x, \cdots)$ は $\varphi(x, \cdots)$ を満たす最小の x か、又は、そのような x が存在しない時は 0 を表わすものとする。

この時、T は model を持つ。

[証明] T′ を T の任意の有限部分集合とする。ある c, $d \in \mathbb{N}$ が存在して、$(\mathbb{N}, f, c, d)$ が T′ の

model になることを証明すればよい。 まず $\varphi_1, \cdots \varphi_m$ を T' の (4) に現われる formulae の全体とする。 $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = \mu x \varphi_i(x, b_1, \cdots, b_{k_i}),$ for some $i \leq m, b_1 \cdots b_k \leq c\}$ とすると、A の元の個数は 高々 $\sum_{i=1}^{m} c^{k_i}$ である。よって (a) より $\sum_{i=1}^{m} c^{k_i} < f(c)$ を満たす $c \in \mathbb{N}$ が無限個存在する。 従って T' の (2) も満たすように c をとってくることができる。 $[0, f(c)] - A$ は nonempty より、d をこの中から一つとってくると $(\mathbb{N}, f, c, d)$ が T' の model になることは つくり方より明らか。

<u>Lemma 2.</u> 次の条件を満たす $L \cup \{c\}$ の可算model I, M が存在する。

(1) $(\mathbb{N}, f) \prec I \prec M$

(2) $[0, c]^I = [0, c]^M$

(3) $[0, f(c)]^I \neq [0, f(c)]^M$

[証明] M を Lemma 1 の T の可算 model とする。

$$I = \{ a \in M \mid a = \mu x \varphi(x, b_1, \cdots, b_k) \text{ ただし } \varphi \text{ は } L \text{ の formula}, \ b_1, \cdots, b_k \leq c \}$$

とおくと、明らかに $[0, c]^M \subset I$ 従って $[0, c]^M = [0, c]^I$。又、Lemma 1 の (4) より $d \notin [0, f(c)]^I$、よって $[0, f(c)]^I \neq [0, f(c)]^M$。 したがって $I \prec M$ を証明すれば十分である。

$I_0 = I$

$I_{n+1} = \{ a \in M \mid a = \mu x \varphi(x, b_1, \dots, b_k)$ ただし

φ はLのformulaで $b_1, \dots, b_k \in I_n \}$

とおく。Löwenheim-Skolemの定理の証明と同様に $\cup I_n \prec M$ が証明される。ところで任意の $a \in I_1$ に対して

$$
\begin{aligned}
a &= \mu x \varphi(x, b_1, \dots, b_k) \\
&= \mu x (\varphi(x, y_1, \dots, y_k) \wedge y_1 = \mu x_1 \psi_1(x_1, b_{11}, \dots) \\
&\qquad \cdots \wedge y_k = \mu x_k \psi_k(x_k, b_{1k}, \dots))
\end{aligned}
$$

ただし $b_1, \dots, b_k$ は I のえ、(したがって $b_{11}, \dots, b_{1k}, \dots \le c$.
よって $a \in I$ となる。従って $I = I_1 = \cup I_n \prec M$ となり Lemma 2 が証明された。

__Lemma 3__ (R. Vaught) $R(x)$, $S(x)$ をformulaeとする。$R^I = R^M$, $S^I \neq S^M$, $I \prec M$ なるmodel I, M が存在するならば、R^J は可算、S^J は非可算となるような M のelementary extension J が存在する。

Lemma 3の証明は、Vaughtのtwo-cardinal theoremと同じようにして証明できる(c.f. p.p. 130-131 [2])

Lemma 2とLemma 3より定理1が証明される。
定理1において $f(m) = 2^m$ とおくと (*)のmodelが

得られる。

References

[1] Bell, J. L. and Slomson, A. B.
Models and Ultraproducts. Amsterdam North-Holland Publishing Company, 1969.

[2] Sacks, G. E. Saturated Model Theory, Benjamin, New York, 1972.